Transformations de Galilée

1 Exercice Bateau

1. Une embarcation traverse un fleuve d'une rive à l'autre en suivant le plus court chemin. On suppose que la vitesse du bateau $\vec{v}$ est trois fois supérieure à celle du courant $\vec{u}$ sur le fleuve. Faites un dessin pour représenter cette situation et indiquez en particulier la direction que doit prendre le bateau par rapport aux rives du fleuves.
2. Lorsqu'un voilier avance sur l'eau on distingue trois sortes de vents : (i) Le *vent réel* $\vec{V}_R$, est le vent qui souffle sur la surface de l'eau ; (ii) le *vent apparent* $\vec{V}_A$, est le vent mesuré par l'anémomètre du bateau ; (iii) le *vent vitesse* $\vec{V}_V$, est le vent "créé" par la vitesse du bateau. En utilisant les transformations de Galilée, explicitez la relation entre ces trois vecteurs vitesse.

2 Aberration des étoiles : relativité de la parallaxe (cf. J.P. Pérez p. 61)

La *parallaxe* d'une étoile est l'angle sous lequel le rayon de l'orbite terrestre annuelle est vu depuis cette étoile.

Par exemple la parallaxe de l'étoile γ du Dragon, qui est un astre éloigné dans la direction perpendiculaire à l'écliptique, est de l'ordre de la seconde d'arc. Or l'observation de cette étoile depuis la terre indique une parallaxe "apparente" d'une vingtaine de secondes d'arc. Cette anomalie, appelée *aberration* de la parallaxe, fut observée par l'astronome J. Bradley en 1725. Il en déduisit une valeur approchée, mais remarquablement bonne pour l'époque, de la vitesse de la lumière.

1. Par rapport à quel référentiel $\mathcal{R}$ la définition de parallaxe est-elle formulée ?
2. Supposons que la parallaxe d'une étoile soit nulle ou négligeable. Associons à la terre un système de coordonnées $\mathcal{R}'$ dans lequel l'axe Ox' est aligné suivant la direction de translation de la terre (à vitesse V) autour du soleil. L'axe Oy' est supposé perpendiculaire à l'écliptique. Pour une position donnée de la terre, quel est l'angle α sous lequel le flux de photons en provenance de l'étoile est-il perçu ?
3. Quel est le mouvement annuel de l'étoile observée depuis la terre ?
4. A.N. : en supposant $\alpha = 20''$ et $V = 30$ km/s, quelle valeur de la vitesse de la lumière c obtient-on ?

3 Conservation de la masse en mécanique classique

Rappelez le principe de conservation de la quantité de mouvement en mécanique (et son lien avec le principe "action=réaction"). Montrez que l'invariance relativiste galiléenne appliquée à ce principe implique la conservation de la masse totale d'un système fermé.

4 Collisions élastiques

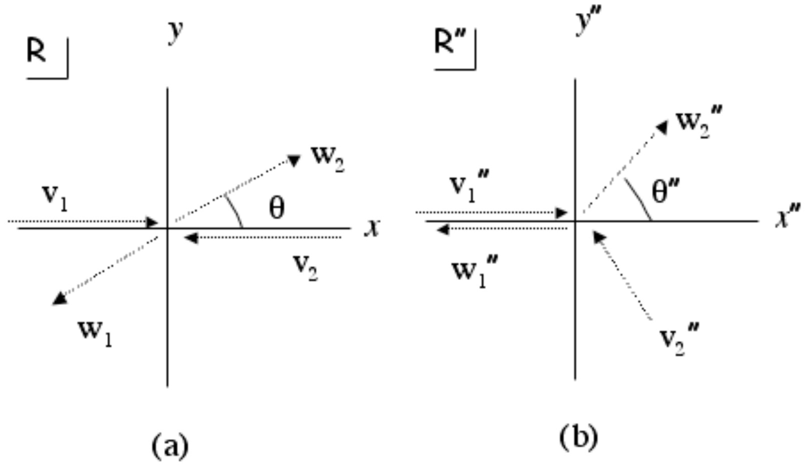

FIG. 1 – une “même” collision vue dans deux référentiels distincts

La figure 2(a) décrit la collision élastique entre deux particules de masses m_1 et m_2, telle qu'elle perçue dans un référentiel $\mathcal{R}$ où le centre de masse est au repos.

Existe-t-il un référentiel d'inertie $\mathcal{R}''$ où la même collision peut être représentée comme sur la figure 2(b) ? Si oui, spécifiez le changement de variable approprié.

5 Effet Doppler (galiléen)

Une source immobile dans un référentiel donné émet des pulses toutes les T_S secondes.

On suppose que la vitesse des pulses est égale à c.

Un récepteur mobile se déplace à la vitesse uniforme $v < c$.

Montrez que l'intervalle de temps T_R qui sépare deux pulses reçus par le récepteur peut être déduit de l'équation :

$$T_R = \frac{1}{1 - v/c} T_S$$

6 Front d'onde en relativité galiléenne

On considère deux systèmes de coordonnées inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ reliés entre eux par la transformation de Galilée. L'équation des fronts d'onde issus d'une source ponctuelle placée à l'origine dans $\mathcal{R}$ est donnée par $x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$ (si la vitesse des ondes en question est c). Représentez ces fronts d'onde dans $\mathcal{R}'$. Déduisez-en les vitesses sur les demi-axes $\pm x', \pm y'$ et $\pm z'$.

Transformations de Lorentz-Poincaré

7 Facteur relativiste gamma

On considère le facteur $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ qui joue un rôle important dans les transformations de Lorentz-Poincaré. Pour rappel ici $\beta = V/c$ où V est la vitesse de changement de référentiel.

Que vaut γ lorsque $\beta = 0.1$? Et pour $\beta = 0.6$? Pour quelles valeurs de V a-t-on γ égal à 2 et à 10 ? Calculez les trois premiers termes du développement limité de γ en fonction de V.

8 Groupe des transformations de Lorentz-Poincaré

On considère la matrice $L(\phi)$ associée à la transformation de Lorentz-Poincaré paramétrisée par le paramètre de rapidité $\phi = \arg\tanh \frac{V}{c}$. Calculer explicitement le produit matriciel $L(\phi_1)L(\phi_2)$. En déduire directement que ces transformations forment un groupe.

9 Intervalles entre événements (cf. JP Pérez P2-1, P2-2)

1. Vérifier explicitement que l'intervalle entre deux événements :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2,$$

   est invariant sous les transformations de Lorentz-Poincaré.
2. Un événement se produit au point de coordonnées $(x', y', z') = (0.8\text{ m}, 0.1\text{ m}, 0)$ et à l'instant $t' = 2$ ns dans le référentiel $\mathcal{R}'$. La vitesse de ce dernier est $V = 0.8c$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
   – Trouver les coordonnées de cet événement dans $\mathcal{R}$.
   – Calculer le carré de l'intervalle qui relie cet événement à l'événement origine. Peut-on trouver un référentiel $\mathcal{R}''$ dans lequel cet événement se produit à l'instant $t'' = 0$?
3. Deux événements E_1 et E_2 ont pour coordonnées spatio-temporelles respectives $(x, y, z, t) =$ (3 m, 0,0,10 ns) et (6 m,0,0,5 ns).
   – Calculer le carré de l'intervalle entre ces deux événements. Quelle est la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel ces événements sont simultanés ?
   – À quel instant t' de $\mathcal{R}'$ ces événements se produisent-ils simultanément ?

10 Les jumeaux de Langevin

Imaginons deux jumeaux vivant sur la terre. Le jour de leur anniversaire, l'un deux quitte son frère pour effectuer un voyage intersidéral à une vitesse proche de celle de la lumière. À son retour peut-il être plus jeune que son frère resté sur terre ?

On pourrait penser : le mouvement relatif des jumeaux s'est effectué à la même vitesse relative (au signe près), donc il n'y a pas de raison pour que l'un des deux vieillisse plus ou moins vite que l'autre. Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

Considérons une situation simplifiée en une dimension spatiale. Soit J_1 et J_2 les jumeaux et $\mathcal{R}_1$ le référentiel d'inertie dans lequel J_1 est au repos durant le voyage de J_2.

On néglige les phases d'accélérations de J_2. On imagine qu'à $t = 0$ (même origine du temps pour tous les référentiels considérés), le jumeau J_2 saute dans une navette spatiale, emporté à vitesse constante $V = 0.6c$. Soit $\mathcal{R}_2$ le référentiel associé à la navette durant le voyage "aller". Après 3 ans, la navette fait un brusque demi-tour et revient vers la terre à la vitesse $-V$ par rapport à $\mathcal{R}_1$. Après 3 nouvelles années J_2 saute à nouveau dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ et retrouve J_1.

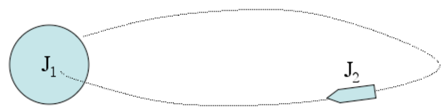

FIG. 2 – Les jumeaux de Langevin

1. Quels sont les âges respectifs de J_1 et J_2 lorsqu'ils se retrouvent ?
2. Dessiner la trajectoire des jumeaux dans le référentiel $\mathcal{R}_1$. A chacun de ses anniversaires, $\tau = 1, 2, \cdots$, J_2 émet des signaux lumineux vers J_1. Comptabiliser graphiquement le nombre de signaux reçus par J_1.

11 Temps propre (cf. Pérez P3-8)

On souhaite envoyer une sonde spatiale dans le voisinage de l'étoile α du centaure, située à une distance $D = 4$ années-lumière de la Terre, à l'aide d'une fusée se déplaçant à vitesse constante v.

1. Quelle doit être la vitesse de la fusée pour que la durée du voyage, mesurée sur les horloges du véhicule spatial, soit $T_p = 1$ an ?
2. Quelle est la durée du voyage pour un observateur terrestre ?
3. Quelle est la distance terre-étoile α dans le référentiel de la fusée ?

12 Relativité des longueurs (cf. Pérez P3-10)

Un train de longueur propre l entre dans un tunnel de longueur $L = l/\gamma$, γ étant le facteur relativiste associé à la vitesse u du train. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du tunnel et $\mathcal{R}'$ celui du train.

1. En adoptant comme événement origine E_1 : " la tête du train sort du tunnel", écrire dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les coordonnées de l'événement "la queue du train entre dans le tunnel".
2. L'événement "le train est contenu dans le tunnel" a-t-il un sens dans le référentiel $\mathcal{R}$? Et dans le référentiel $\mathcal{R}'$?

13 Effet Doppler relativiste (longitudinal)

Reprendre le problème de la 1ère séance concernant l'effet Doppler.

En particulier calculer l'intervalle de temps propre qui sépare deux réceptions de signaux par le mobile. Comment cet intervalle s'exprime-t-il en fonction du paramètre de rapidité ?

14 Cinématique relativiste **(cf. J.P. Pérez p.57 et 60)**

1. On considère une particule se déplaçant à vitesse $\overrightarrow{v} = d\overrightarrow{r}/dt$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. En utilisant les transformations de Lorentz-Poincaré qui relient les coordonnées $(t, \overrightarrow{r})$ de $\mathcal{R}$ à celles du référentiel $\mathcal{R}'$, montrer que la relation entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ peut s'écrire :
$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}; \qquad v_y = \frac{v'_y}{\gamma(V)(1 + Vv'_x/c^2)}; \qquad v_z = \frac{v'_z}{\gamma(V)(1 + Vv'_x/c^2)}$$
2. Quelle est la vitesse relative de 2 mobiles allant dans une même direction aux vitesses 0.9999997 et 0.9999995 ?
3. Calculer la norme du quadrivecteur vitesse propre $\underline{U} = \frac{d}{d\tau}\underline{X} = \gamma(v)(c, \vec{v})$.

15 Expérience de Fizeau **(cf. J.P. Pérez p.10 et 62)**

En 1851, H. Fizeau montra que la vitesse de la lumière dans un liquide en mouvement se déplaçant à vitesse V par rapport au référentiel formé par le laboratoire est donnée par

$$c'' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V$$

où n est l'indice du milieu liquide. On rappelle que dans le liquide immobile la vitesse de la lumière est égale à $c' = c/n$. Dès lors, qu'obiendrait-on en mécanique galiléenne pour la vitesse c'' de la lumière dans le liquide en mouvement ? Montrer que la formule de Fizeau est une vérification expérimentale directe de la loi de composition des vitesses en relativité restreinte.

16 Rayonnement anisotrope d'une source en mouvement **(cf. J.P. Pérez p. 62)**

On considère une source lumineuse qui émet un rayonnement lumineux isotrope dans un référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la source. On suppose que cette source se déplace à la vitesse V par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ lié au laboratoire. Le rayonnement lumineux reste-t-il isotrope ?

Pour répondre à cette question considérer un photon de vitesse c en mouvement selon une direction faisant un angle θ' avec $O'x'$. En utilisant les lois de transformation des vitesses, montrer que l'angle sous lequel ce photon est émis dans le laboratoire est donné par :

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + V/c}{1 + (V\cos\theta')/c}$$

En déduire l'angle sous lequel sont émis pour un observateur de $\mathcal{R}$ tous les photons émis dans $\mathcal{R}'$ sous les angles compris entre 0 et $\pi/2$.

A.N. : Si la source lumineuse se déplace à grande vitesse, soit $V = 0.99c$, que vaut θ_m ?

Collisions de particules relativistes

17 Diffusion élastique de deux particules de même masse (cf. Hladik et Chrysos)

On considère deux particules de même masse m dont l'une, A, est immobile dans un référentiel $\mathcal{R}$, et l'autre, B, est animée d'une vitesse v parallèle à l'axe Ox de $\mathcal{R}$. La seconde entre en collision élastique "excentrée" avec la particule A.

En supposant qu'après la collision les particules aient une même impulsion p et une même énertie E, montrez que l'angle de diffusion θ entre les deux particules satisfait la relation :

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{E_B + mc^2}{E_B + 3mc^2}}$$

où E_B est l'énergie de la particule incidente mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Discuter les valeurs que prend θ pour de faibles vitesses initiales de la particule B (mécanique "classique") et lorsque l'énergie de la particule incidente est beaucoup plus grande que $m_B c^2$ (cas "relativiste").

18 Centre de masse d'un système de particules (cf. JP Pérez p.118 et P7-16)

Soit un ensemble de N particules caractérisées chacunes par sont 4-vecteur $(E_i/c, \overrightarrow{p}_i)$. Le référentiel du centre de masse est défini comme celui dans lequel l'impulsion totale s'annulle, soit $\overrightarrow{P} = \sum_i \overrightarrow{p}_i = 0$. Pour se placer dans ce référentiel il suffit de considérer une transformation (de Lorentz-Poincaré) correspondant à la vitesse du centre de masse.

- En mécanique classique la vitesse du centre de masse peut être définie par $\overrightarrow{v}_{CM} = \sum_i m_i \overrightarrow{v}_i / \sum_i m_i$. Pourquoi cette définition ne convient pas en relativité restreinte ?
- Montrer que la vitesse du centre de masse en relativité peut s'écrire $\overrightarrow{v}_{CM} = c^2 \sum_i \overrightarrow{p}_i / \sum_i E_i$. (Suggestion : utiliser la loi de transformation du 4-vecteur énergie-impulsion vue en cours).
- Quelle est l'expression de la masse M d'un système de particules sans interaction, en fonction des masses $\{m_i\}$ et des facteurs relativistes $\{\gamma_i^*\}$ dans $\mathcal{R}^*$?

19 Désintégration du neutron (radioactivité β^-)

Si la désintégration d'un neutron au repos se faisait selon $n \to p + e^-$ montrer que l'énergie des e^- produits serait fixée.

(Ceci n'étant pas le cas, Fermi a prédit l'existence d'un neutrino : $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$.)

20 Matérialisation de photons en paires électron-positron (cf. Pérez P7-16, P7-22)

1. Montrer que la matérialisation $\gamma \to e^+ + e^-$ d'un photon nécessite la présence d'au moins une particule supplémentaire.
2. Calculer l'énergie de seuil du photon pouvant donner lieu à la création d'une paire électron-positron dans la réaction
$$\gamma + e^- \to e^- + (e^+ + e^-)$$
(a) dans le référentiel du centre de masse ; (b) dans le référentiel où l'électron cible est au repos.
3. Calculer l'énergie seuil de la réaction
$$\gamma + X^+ \to X^+ + (e^+ + e^-)$$
où X^+ est un noyau lourd.

21 Effet Compton (cf. J.P. Pérez p.131)

Supposons qu'un photon de longueur d'onde λ entre en collision élastique avec un électron au repos.
$$\gamma + e^- \to \gamma' + e^-$$
En utilisant la loi de conservation du quadrivecteur énergie-impulsion, montrer que l'angle sous lequel le photon est diffusé (par rapport à sa direction d'incidence) est relié à la longueur d'onde de celui-ci après le choc par la relation :
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$
où h est la constante de Planck et m est la masse de l'électron. Cette prédiction théorique de la théorie de la relativité est vérifiée expérimentalement de façon remarquable.

Questions subsidiaires :
- Comment peut-on interpréter la constante $\frac{h}{mc} = 2.426309$ pm ?
- Quelle est la différence essentielle entre l'effet Compton et l'effet photoélectrique ?

22 Anneaux de stockage et création d'anti-protons (cf. Pérez P7-10, P7-12)

Pour réaliser des collisions proton-proton à très grande énergie, on utilise des anneaux de stockage qui permettent de réaliser des collisions entre deux protons de même énergie cinétique $\mathcal{E}_k^*$ et d'impulsions opposées.

1. Quelle devrait être l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ communiquée à un proton pour que, lors d'une collision avec un proton cible immobile, on dispose de la même énergie dans le référentiel du centre de masse ?
A.N. $\mathcal{E}_k^* = 28$ GeV. ($m_p = 938$ MeVc^{-2}).

2. On produit une paire proton-antiproton par collision d'un proton projectile et d'un proton cible, à l'aide de la réaction :

$$p + p \to p + p + (p + \overline{p}) \tag{1}$$

   Comparer les énergies cinétiques-seuil requises pour créer une paire proton-antiproton (i) dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse et (ii) dans un référentiel $\mathcal{R}$ où l'un des protons initiaux est au repos.

23 Annihilation d'une paire d'électrons (cf. Pérez P7-24)

Un électron et un positron, de mêmes énergies cinétiques E_k s'annihilent en produisant deux photons suivant la réaction suivante :

$$e^- + e^+ \to \gamma_1 + \gamma_2$$

1. Les particules incidentes se déplacent avec des vitesses opposées. Calculer les énergies $E_{\gamma,1}$ et $E_{\gamma,2}$ des photons produits, dans le cas où $E_k = 3$ MeV.
2. Les vitesses des particules incidentes font entre elles un angle α au moment de leur rencontre. Etablir les expressions des énergies $E_{\gamma,1}$ et $E_{\gamma,2}$ en fonction de E_k et α. A.N. $E_k = 3$ MeV et $\alpha = 2\pi/3$.

24 Fission de l'Uranium 235 (cf. Pérez P8-3)

On considère la fission suivante d'un noyau d'uranium 235 par un neutron :

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} + n \to {}^{90}_{36}\,\mathrm{Kr} + {}^{142}_{Z}\mathrm{Ba} + A\,n$$

où Z et A sont deux entiers naturels.

1. Déterminer A et Z
2. On donne :

$$m_U = 235,043915\ \mathrm{u}; \quad m_{Kr} = 89,919720\ \mathrm{u}; \quad m_{Ba} = 141,916350\ \mathrm{u}; \quad m_n = 1,008676\ \mathrm{u}$$

   avec l'*unité de masse atomique*[1] :

$$1\ \mathrm{u} = 1,661\,10^{-27}\ \mathrm{kg} \approx 931,5\ \mathrm{MeV.c}^{-2}$$

   Calculer en MeV, l'énergie libérée par cette réaction.
3. Dans un réacteur nucléaire, d'une puissance de 500 MW, un noyau d'uranium 235 libère par une telle fission une énergie de 185 MeV par noyau. Calculer en joule l'énergie libérée par un kg d'uranium 235, ainsi que la durée nécessaire pour consommer cette masse d'uranium.

[1] L'unité de masse atomique u.m.a. est la masse d'une particule fictive dont une mole correspondrait exactement à 1 g, soit $6,02\,10^{23}$ u.m.a. = 1 g

Champs électromagnétiques

25 Champ magnétique constant (cf. J.P. Pérez p.96)

Montrez que la dynamique relativiste d'une particule de masse m et de charge q dans un champ magnétique constant $\overrightarrow{B}$ conserve l'énergie, $dE/dt = 0$.

Déduisez-en que la trajectoire de cette particule peut résulter en un mouvement circulaire uniforme dont la vitesse angulaire est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{\omega} = -\frac{q}{m\gamma(v)}\overrightarrow{B},$$

(dont le module est appellée la *pulsation cyclotron*).

Discutez qualitativement l'existence d'autres trajectoires plus générales que ce mouvement plan pour ce système physique.

26 Champ électrique constant (cf. J.P. Pérez p.93-93)

On considère une particule chargée de charge q et de masse m soumise à un champ électrique constant $\overrightarrow{E} = E_x\hat{x}$. En utilisant les équations de la dynamique $\dot{p}_x = F_x$ et $\dot{x} = c^2 p_x/E$, où E est l'énergie relativiste, montrez que lorsque la particule est initialement au repos ($x = v_x = 0$ à $t = 0$) l'équation de sa trajectoire peut être décrite par l'équation :

$$x(t) = \frac{c^2}{A}\left(\sqrt{1+\frac{A^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

où $A = qE_x/m$.

Comment s'interprète le paramètre A ?

Que retrouve-t-on dans les limites, respectivement $t \ll c/A$ et $t \to \infty$?

Représentez cette trajectoire dans l'espace temps en utilisant les coordonnées (x, ct) et comparez-la à la trajectoire non-relativiste.

27 Relativité galiléenne du champ électromagnétique

Supposons que dans le référentiel $\mathcal{R}$ il existe un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = B\hat{z}$ et aucun champ électrique. Dans ce référentiel un barreau conducteur (de longueur finie) parallèle à l'axe Oy se déplace à vitesse constante avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v\hat{x}$.

Décrivez qualitativement la distribution des charges libres du conducteurs induite par la force de Laplace dans cette situation.

En utilisant les transformations *galiléennes* des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, décrivez qualitativement le même système dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où le barreau est au repos. Existe-t-il encore une force de Laplace sur les charges du barreau dans cette nouvelle situation ?